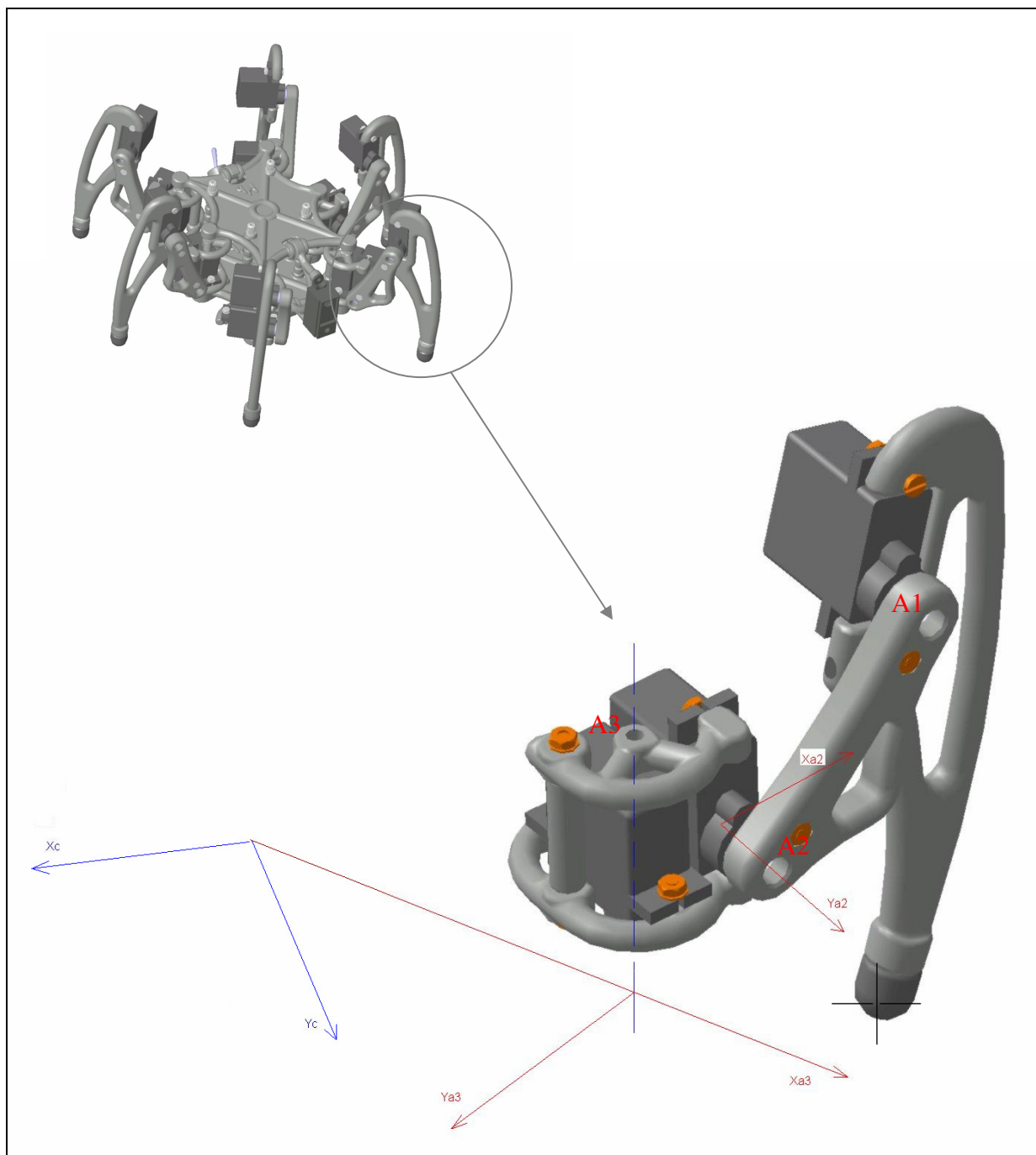


Equations de commande d'un robot hexapode

- ✓ Déterminer les angles d'articulations en fonction de la position de l'extrémité de la patte.
- ✓ Une méthode pour l'interpolation linéaire (marche droite).
- ✓ Une méthode pour l'interpolation circulaire (marche courbe).
- ✓ Une méthode pour le changement d'assiette (inclinaison).

Déterminer les angles d'articulations en fonction de la position de l'extrémité de la patte.

Les différents repères

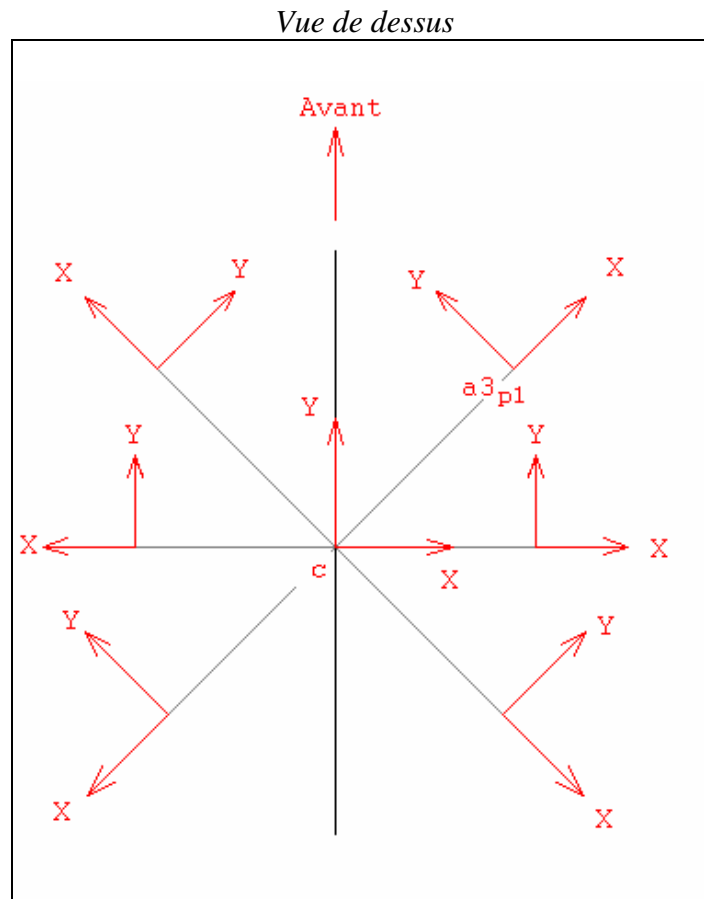


Le but est de piloter l'extrémité d'une patte par ses coordonnées dans un repère cartésien. Pour des raisons de simplicité, on exprimera les coordonnées dans un repère fixe (c) centré sur le corps de l'hexapode.

Afin de calculer les angles à appliquer aux trois articulations de la patte nous devons utiliser différents repères, fixes ou mobiles par rapport au corps.

Toutes les mesures d'angle dans les formules sont exprimées en radians.

- Repères fixes par rapport au corps c et $a3$:

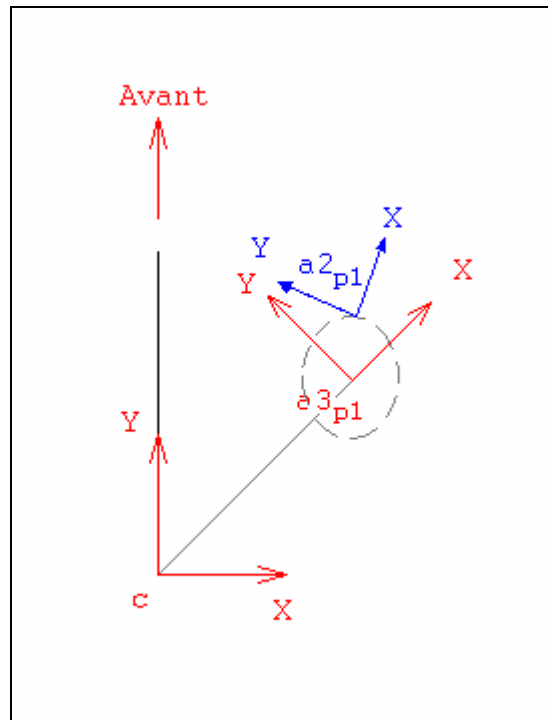
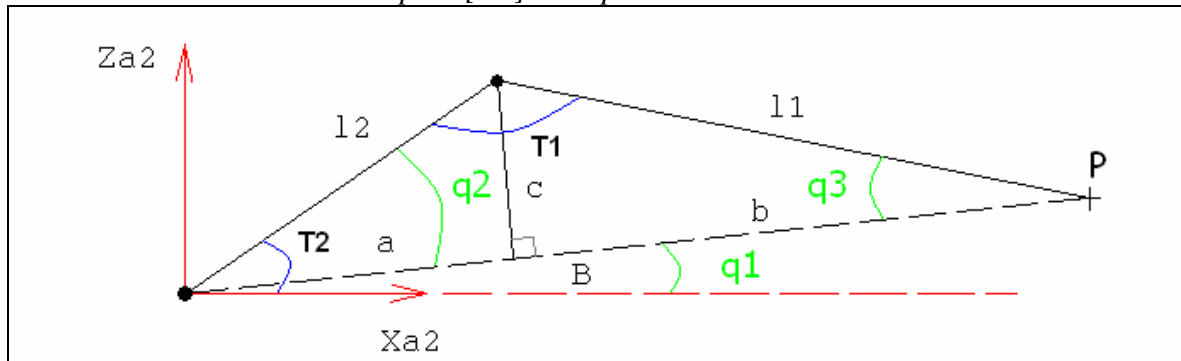


Le repère c est centré sur le corps de l'hexapode. Le plan $[XY]$ du repère coïncide avec la face inférieure du corps (le point le plus bas).

Les repères $a3px$ sont centrés sur les articulations $A3$ de chaque patte.

- Repère mobile par rapport au corps **a2**:

Vue de dessus

Articulations A2 et A1 dans le plan [XZ] du repère **a2** :

- Soient **l1** et **l2** respectivement les longueurs des phalanges extrême et intermédiaire.
- Soit **T1** l'angle entre la phalange extrême et la phalange intermédiaire.
- Soit **T2** l'angle entre l'axe **X** et la phalange intermédiaire.
- Soit **q1** l'angle entre l'axe **X** et la ligne imaginaire **B**, passant par le centre de l'articulation **A2** et le point **P**.
- Soit **q2** l'angle entre **B** et la phalange intermédiaire.
- Soit **q3** l'angle entre **B** et la phalange extrême.

$$B = a + b$$

$$B^2 = P_x a^2 + P_z a^2$$

$$\cos(q2) = \frac{a}{l2}$$

$$T2 = q1 + q2$$

Détermination de $T2$

$$a^2 = l2^2 - c^2$$

$$b^2 = l1^2 - c^2$$

$$a^2 - b^2 = l2^2 - l1^2$$

$$a^2 - (B - a)^2 = l2^2 - l1^2$$

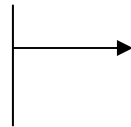
$$a^2 - (B^2 + a^2 - 2aB) = l2^2 - l1^2$$

$$-B^2 + 2aB = l2^2 - l1^2$$

$$a = \frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2B}$$

$$\cos(q2) = \frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2 * l2 * B}$$

$$q1 = \arctan\left(\frac{Pza2}{Pxa2}\right)$$



$$T2 = \arccos\left(\frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2 * l2 * B}\right) + \arctan\left(\frac{Pza2}{Pxa2}\right)$$

Détermination de $T1$

$$T1 = \pi - q2 - q3$$

$$T1 = \pi - \arccos\left(\frac{a}{l2}\right) - \arccos\left(\frac{b}{l1}\right)$$

$$T1 = \pi - \left(-\arcsin\left(\frac{a}{l2}\right) + \arcsin\left(\frac{b}{l1}\right) + \pi\right)$$

$$T1 = \arcsin\left(\frac{a}{l2}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{l1}\right)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(T1) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{a}{l2}\right) * \arcsin\left(\frac{b}{l1}\right)\right) + \frac{ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{l2^2}} * \sqrt{1 - \frac{b^2}{l1^2}} + \frac{ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \sqrt{\frac{l2^2 - a^2}{l2^2}} * \sqrt{\frac{l1^2 - b^2}{l1^2}} + \frac{ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \sqrt{\frac{c^2}{l2^2}} * \sqrt{\frac{c^2}{l1^2}} + \frac{ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \frac{c}{l2} * \frac{c}{l1} + \frac{ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \frac{c^2 + ab}{l1l2} = \frac{l2^2 - a^2 + ab}{l1l2}$$

$$\cos(T1) = \frac{l2^2 - (a^2 - ab)}{l2^2} = -\frac{-l2^2 + (a(a + b))}{l1l2}$$

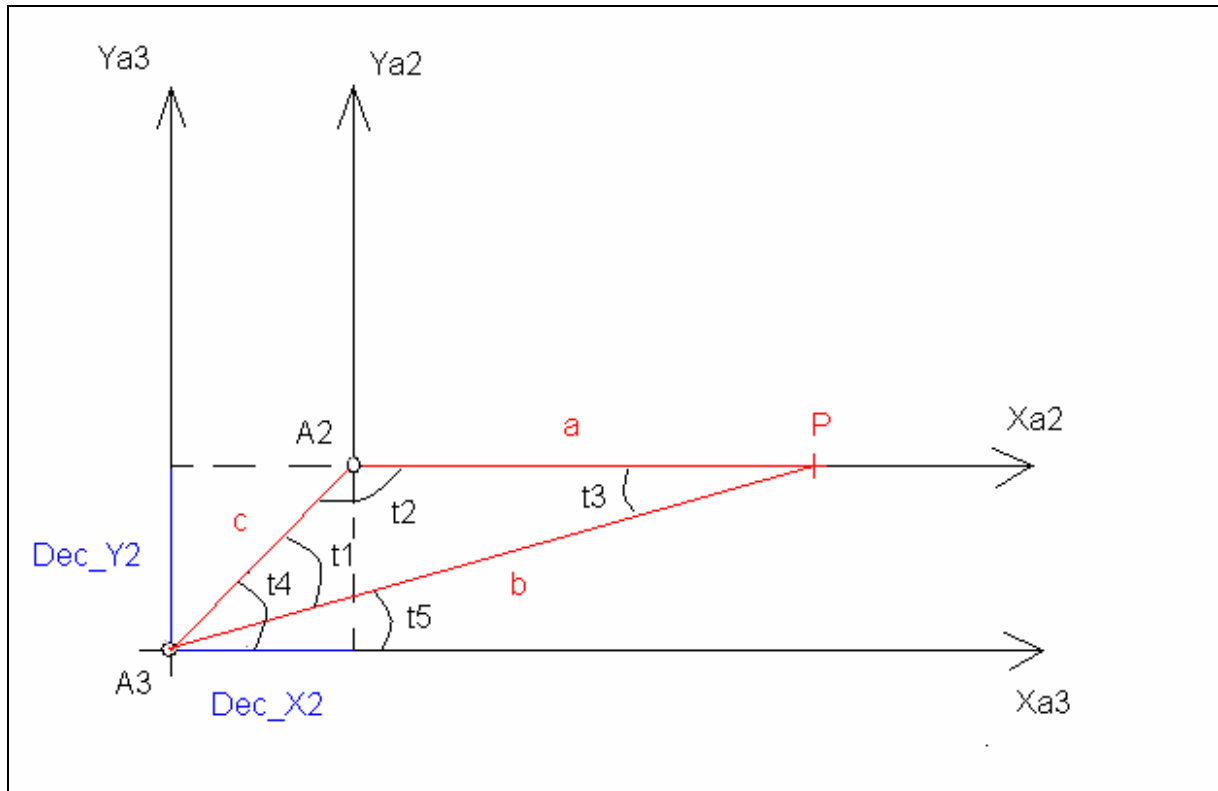
$$\cos(T1) = -\frac{-l2^2 + aB}{l1l2} = \frac{l2^2}{l1l2} - \frac{aB}{l1l2}$$

$$a = \frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2B}$$

$$\cos(T1) = -\frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2l1l2} + \frac{2l2^2}{2l1l2}$$

$$\cos(T1) = \frac{2l2^2 - B^2 - l2^2 + l1^2}{2l1l2} = \frac{l2^2 + l1^2 - B^2}{2l1l2}$$

$$T1 = \arccos\left(\frac{l1^2 + l2^2 - B^2}{2l1l2}\right)$$

Détermination de l'angle de l'articulation **A3 (T3)**

- **Dec_X2** représente le décalage en **X** entre les articulations **A3** et **A2**.
- **Dec_Y2** représente le décalage en **Y** entre les articulations **A3** et **A2**.
- **Dec_Z2** représente le décalage en **Z** entre les articulations **A3** et **A2** (**=0**).
- Soit **a** la projection sur **Xa2** de la ligne imaginaire B définie précédemment.

$$c = \sqrt{Dec_X2^2 + Dec_Y2^2}$$

$$t2 = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{Dec_X2}{Dec_Y2}\right)$$

$$b = \sqrt{Pxa3^2 + Pya3^2}$$

On sait que :

$$\frac{a}{\sin(t1)} = \frac{b}{\sin(t2)} = \frac{c}{\sin(t3)} \quad \text{Loi de proportionnalité du sinus.}$$

Donc :

$$t3 = \arcsin\left(\frac{c \times \sin(t2)}{b}\right)$$

$$t1 = \pi - t2 - \arcsin\left(\frac{c \times \sin(t2)}{b}\right)$$

$$a = \sqrt{b^2 - c^2 \times \sin(t2)^2} + c \times \cos(t2)$$

$$Pxa2 = Bx = \sqrt{b^2 - c^2 \times \sin(t2)^2} + c \times \cos(t2)$$

$$Pya2 = 0$$

$$t4 = \arctan\left(\frac{Dec_Y2}{Dec_X2}\right)$$

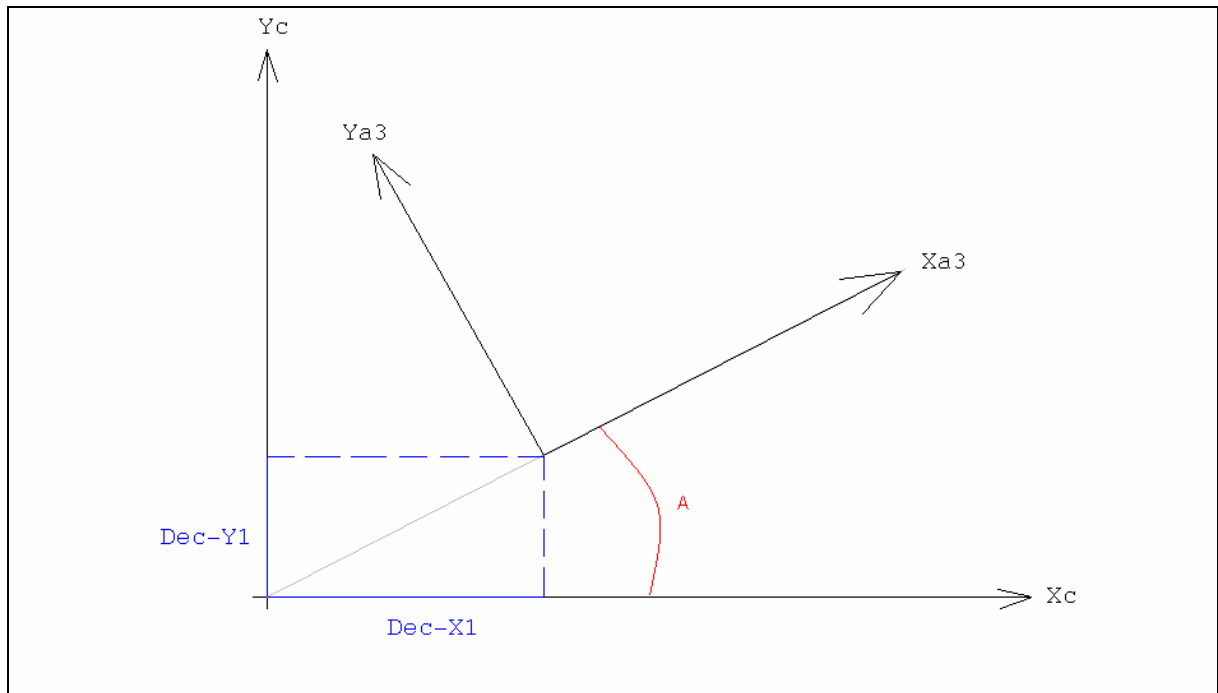
$$t1 = \arcsin\left(\frac{a \times \sin(t2)}{b}\right)$$

$$t5 = \arctan\left(\frac{Pya3}{Pxa3}\right)$$

Soit T3 l'angle de l'articulation A3, on a :

$$T3 = t5 + t1 - t4$$

Changement de repère (repère c vers repère de a3)
--



- Le repère **a3** est centré sur l'articulation **A3**.
- Le repère **c** est centré sur le corps de l'hexapode (L'axe **y** pointe vers l'avant de l'hexapode).
- **A** représente l'angle entre l'axe **X** du repère centré sur le corps et l'axe **X** du repère centré sur l'articulation **A3**.
- **Dec_X1** représente l'abscisse du centre du repère **a3** dans le repère **c**.
- **Dec_Y1** représente l'ordonnée du centre du repère **a3** dans le repère **c**.
- **Dec_Z1** représente l'altitude du centre du repère **a3** dans le repère **c** (=0).

A, Dec_X1, Dec_Y1 et Dec_Z1 varient en fonction de la patte.

$$P_{xa3} = P_{xc} \times \cos(A) + P_{yc} \times \sin(A) - \sqrt{DEC_X1^2 + DEC_Y1^2}$$

$$P_{ya3} = -(P_{yc} \times \cos(A) - P_{xc} \times \sin(A))$$

Récapitulatif

Repère c vers a3 :

$$Pxa3 = Pxc \times \cos(A) + Pyc \times \sin(A) - \sqrt{DEC_X1^2 + DEC_Y1^2}$$

$$Pya3 = -(Pyc \times \cos(A) - Pxc \times \sin(A))$$

$$Pza3 = Pzc - Dec_Z1$$

Repère a3 vers a2 :

$$b = \sqrt{Dec_X2^2 + Dec_Y2^2}$$

$$c = \sqrt{Pxa3^2 + Pya3^2}$$

$$t2 = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{Dec_X2}{Dec_Y2}\right)$$

$$Pxa2 = Bx = \sqrt{b^2 - c^2} \times \sin(t2) + c \times \cos(t2)$$

$$Pya2 = 0$$

$$Pza2 = Pz3 - Dec_Z2$$

Angle d'articulations :

$$B = \sqrt{Pxa2^2 + Pza2^2}$$

$$T1 = \arccos\left(\frac{l1^2 + l2^2 - B^2}{2l1l2}\right)$$

$$T2 = \arccos\left(\frac{B^2 + l2^2 - l1^2}{2 * l2 * B}\right) + \arctan\left(\frac{Pza2}{Pxa2}\right)$$

$$T3 = \arctan\left(\frac{Pya3}{Pxa3}\right) + \arcsin\left(\frac{a \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{Dec_X2}{Dec_Y2}\right)\right)}{\sqrt{Pxa3^2 + Pya3^2}}\right) - \arctan\left(\frac{Dec_Y2}{Dec_X2}\right)$$

Une méthode pour l'interpolation linéaire (marche droite).

La marche droite consiste à se déplacer d'une distance donnée dans une direction donnée, avec une foulée (distance d'un pas) donnée.

Les trois paramètres principaux de la méthode sont donc :

L : la distance.

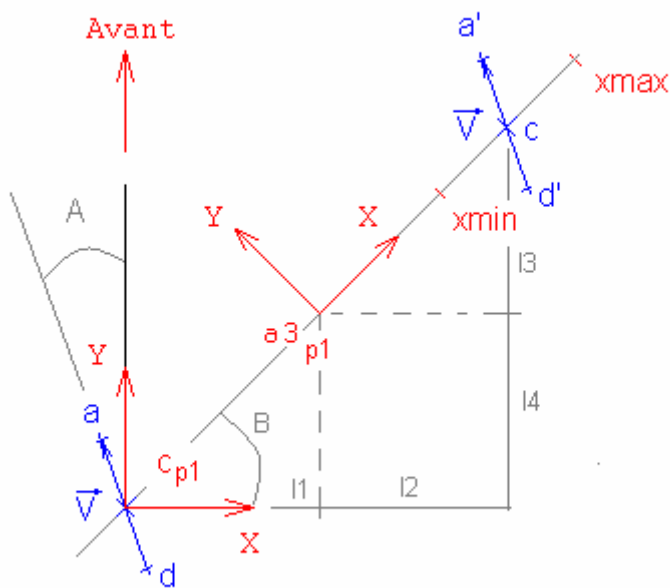
A : l'angle entre la direction de marche et l'axe longitudinal de l'hexapode (Yc).

P : le pas unitaire ou foulée d'une patte.

Un autre paramètre est également utilisé :

G : la garde au sol ou la distance entre le sol et le chassis.

Exemple pour la patte n°1



Soit \vec{V} le vecteur de norme égale à L, formant un angle A avec l'axe Yc.

$$l1 = Dec_X1$$

$$l2 = \cos(B) \times \left(x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \right)$$

$$l3 = \sin(B) \times \left(x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \right)$$

$$l4 = Dec_Y1$$

Coordonnées des points de départ et arrivée **d** et **a** exprimées dans **cp1**.

$$ax = -\sin(A) \times \frac{L}{2}$$

$$ay = \cos(A) \times \frac{L}{2}$$

$$dx = -ax$$

$$dy = -ay$$

Coordonnées des points de départ et arrivée **d'** et **a'** translats en **c** exprimées dans **cp1**.

$$a'x = ax + l1 + l2$$

$$a'y = ay + l3 + l4$$

$$d'x = dx + l1 + l2$$

$$d'y = dy + l3 + l4$$

On pourra ensuite calculer la valeur des différentes articulations pour les points de départ et arrivée avec les formules précédentes.

Remarque :

Les pattes, quand elles sont au sol, doivent effectuer un mouvement inverse au sens du vecteur de déplacement souhaité pour l'hexapode.

Le nombre de pas à effectuer correspond à $\frac{L}{P}$

Dans le repère cp1 la coordonnée Z de l'extrémité de la patte vaut -G.

Une méthode pour l'interpolation circulaire (marche courbe).

La marche courbe consiste à se déplacer d'un angle donnée, sur un cercle de centre donné et avec une foulée (distance d'un pas) donnée.

Les trois paramètres principaux de la méthode sont donc :

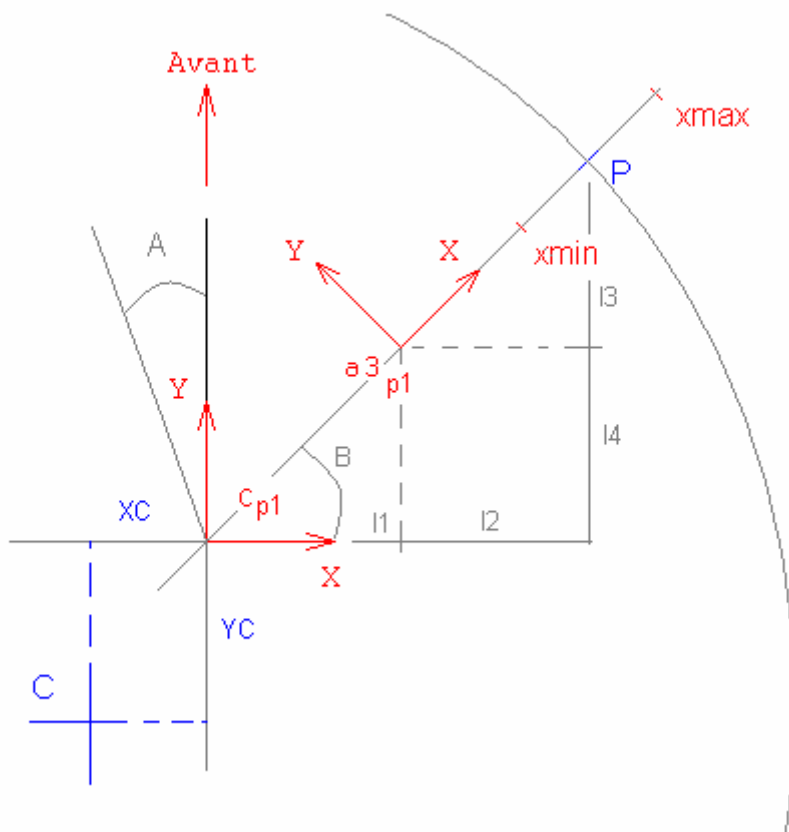
A : angle de rotation.

C(xc;yc) : Les coordonnées du point central C de la rotation.

P : le pas unitaire ou foulée d'une patte.

Un autre paramètre est également utilisé :

G : la garde au sol ou la distance entre le sol et le chassis.



$$l1 = Dec_X1$$

$$l2 = \cos(B) \times (x_{min} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2})$$

$$l3 = \sin(B) \times (x_{min} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2})$$

$$l4 = Dec_Y1$$

Contrairement à la marche droite, lors d'un cycle, les pattes ne décrivent pas toutes le même vecteur de déplacement.

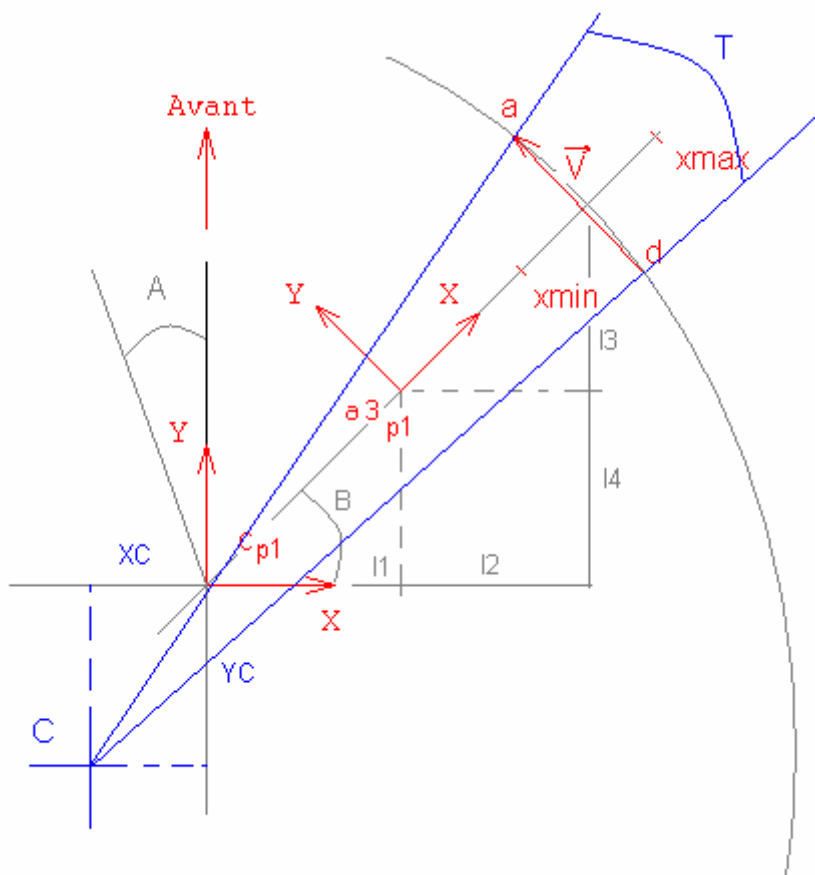
Pour un angle de déplacement unitaire donné, la patte la plus éloignée du centre de rotation décrira la plus grande foulée (correspondant au pas unitaire P souhaité).

Dans un premier temps il faut donc déterminer la patte dont l'extrémité est la plus éloignée du centre de rotation.

Pour chaque patte on calcul la longueur du segment CP :

$$CP = \sqrt{(l1+l2 - XC)^2 + (l3+l4 - YC)^2}$$

Pour la patte ayant le plus grand rayon CP, on calcule l'angle T que représente un déplacement entre deux points, espacés d'une distance P, appartenant au cercle.



$$Circ = 2 \times \pi \times CP$$

$$T = \frac{P \times 2 \times \pi}{Circ}$$

$$T = \frac{P}{CP}$$

T sera l'angle unitaire pour toutes les pattes.

Dans le repère centré sur le cercle on exprime :

- L'angle entre le point de départ d et l'axe X :

$$Ad = \arctan\left(\frac{(l3+l4-YC)}{(l1+l2-XC)}\right) - \frac{T}{2}$$

- L'angle entre le point d'arrivée a et l'axe X :

$$Aa = \arctan\left(\frac{(l3+l4-YC)}{(l1+l2-XC)}\right) + \frac{T}{2}$$

- Les coordonnées de d et a :

$$Xd = \cos(Ad) \times CP$$

$$Yd = \sin(Ad) \times CP$$

$$Xa = \cos(Aa) \times CP$$

$$Ya = \sin(Aa) \times CP$$

On peut maintenant calculer les coordonnées dans le repère corps des points de départ et arrivé du vecteur déplacement.

$$Xd = (\cos(Ad) \times CP) + XC$$

$$Yd = (\sin(Ad) \times CP) + YC$$

$$Xa = (\cos(Aa) \times CP) + XC$$

$$Ya = (\sin(Aa) \times CP) + YC$$

On pourra ensuite calculer la valeur des différentes articulations pour les points de départ et arrivée avec les formules précédentes.

Une méthode pour le changement d'assiette (inclinaison)

L'inclinaison consiste à pivoter le corps d'un angle A autour de l'axe longitudinal et B autour de l'axe transversal.

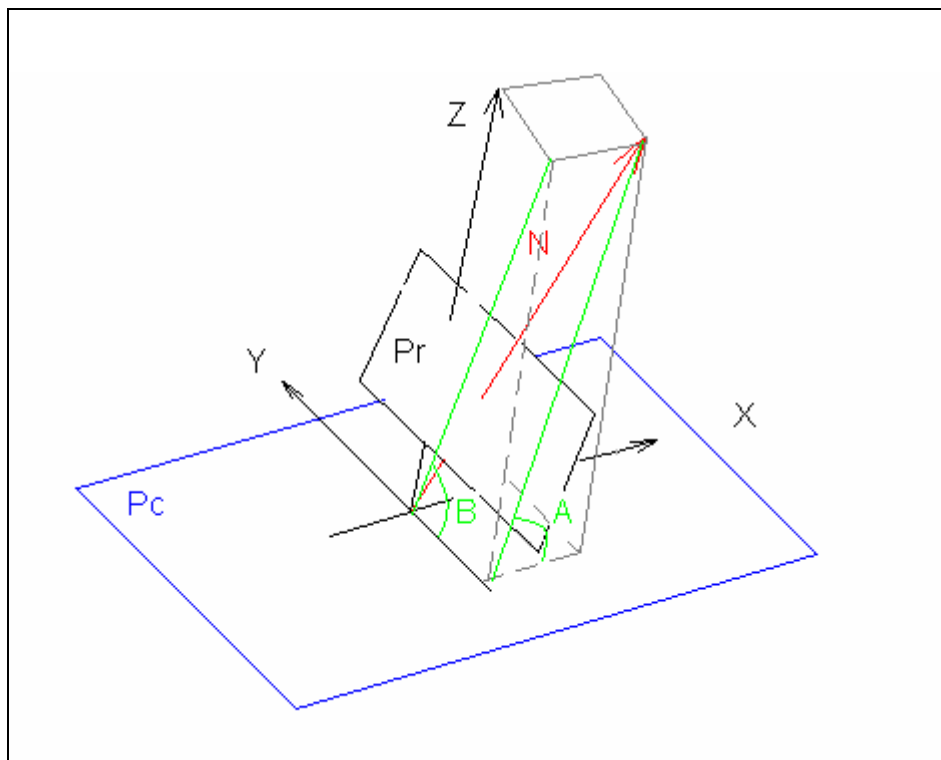
Il faut donc que les extrémités des six pattes appartiennent à un même plan Pr incliner de la valeur souhaitée par rapport au plan [XY] du corps.

Les trois paramètres principaux de la méthode sont donc :

A : angle de rotation autour de Y.

B : angle de rotation autour de X.

G : la garde au sol ou la distance entre le sol et le châssis.



Calcul du vecteur N normal au plan Pr (plan après inclinaison)

$$\begin{array}{l} X \\ \vec{N} = Y \\ Z \end{array} \quad \begin{array}{l} X = Z/\tan(A) \\ Y = Z/\tan(B) \\ Z = 1 \end{array}$$

Coordonnées du centre du repère corps projeté sur le nouveau plan (p) exprimé dans le repère corps.

$$P = (0;0;-G)$$

Equation du plan.

Si $N \{a,b,c\}$ est un vecteur normal au plan.

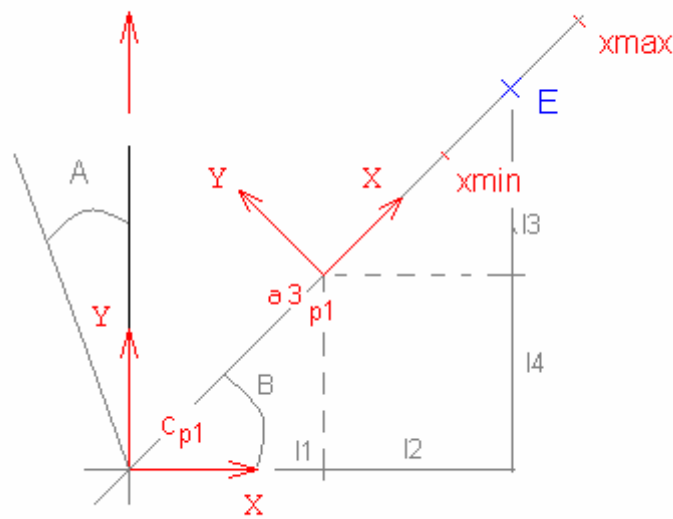
Si $A \{x_a,y_a,z_a\}$ est un point connu du plan.

Si $M \{x,y,z\}$ est un point quelconque du plan.

L'équation du plan est : $ax+by+cz - (ax_a+by_a+cz_a) = 0$

Soit $d=(ax_a+by_a+cz_a)$ la partie constante de l'équation.

Dans notre cas $d=-G$

Calcul des coordonnées d'une extrémité E de patte dans le repère corps.

$$l1 = Dec_X1$$

$$l2 = \cos(B) \times (x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2})$$

$$l3 = \sin(B) \times (x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2})$$

$$l4 = Dec_Y1$$

$$Ex = l1 + l2$$

$$Ey = l3 + l4$$

$$Ez = -G - \left(\frac{Ex}{\tan(A)} - \frac{Ey}{\tan(B)} \right)$$

On pourra ensuite calculer la valeur des différentes articulations avec les formules précédentes.